

Edge Effect Analysis of Square Parallel Plates Capacitors Through the Finite Element Method and Perturbation Theory

Diego Luiz de Oliveira Batista

Depart. de Eng. Elétrica

Instituto Federal do Paraná - Paranavaí Instituto Federal do Paraná - Paranavaí

Paranavaí, PR, Brasil

diego.lui236@gmail.com

Edson Junior Acordi

Depart. de Eng. Elétrica

Instituto Federal do Paraná - Paranavaí

Paranavaí, PR, Brasil

edson.acordi@ifpr.edu.br

João Marcos Batista de Souza Maciel

Depart. de Eng. Elétrica

Instituto Federal do Paraná - Paranavaí

Paranavaí, BR, Brasil

joao.maciell@ifpr.edu.br

Resumo—Due to edge effects, real capacitors have capacitances that do not match the capacitance of ideal capacitors. In engineering projects that require accurate capacitance values, the use of the ideal formula is not recommended. Mathematical modeling and numerical methods applied in computers allow the simulation of several systems. In this work, perturbation theory is used as a mathematical tool, and the finite element method as a numerical method, to propose an equation capable of calculating the capacitance value of non-ideal capacitors.

Index Terms—Perturbation theory, Finite element method, FEMM, Edge effects, Parallel plate capacitor.

I. INTRODUÇÃO

No campo da engenharia elétrica os capacitores de placas paralelas são aplicados em diversas áreas de sensoramento, como de proximidade, pressão e presença. Em cursos introdutórios o capacitor é apresentado como um simples componente eletrônico, mas, na realidade, apresenta diversos problemas, pois sua capacitância é sensível e pode se desviar substancialmente dos valores teóricos [1].

A capacitância de um capacitor ideal de placas paralelas é dada em (1) [2]. No entanto, esta equação é válida para um capacitor ideal em que o campo elétrico $\vec{E}$ está estritamente confinado entre as placas e é perpendicular a elas [3].

$$C_i = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad (1)$$

O processo de fabricação de capacitores não é um problema do ponto de vista tecnológico, mas a determinação correta da sua real capacitância é um desafio [4]. Este desafio se deve, principalmente, aos efeitos de borda que ocorrem em capacitores reais e são desconsiderados na equação da capacitância ideal.

Os efeitos de borda ocorrem em capacitores reais devido a distribuição não uniforme das cargas na superfície das placas [1]. Nas bordas das placas a densidade de carga tende a ser maior, o que contribui para um campo elétrico mais intenso nas bordas, evidenciando que as linhas de campo elétrico fora do capacitor não devem ser negligenciadas [4].

Para problemas bidimensionais, a distribuição do potencial elétrico V , e do campo elétrico $\vec{E}$, de um capacitor pode ser

determinada pela solução da equação de Laplace [5], descrita em (2).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Neste trabalho a equação de Laplace é solucionada numericamente a partir do método dos elementos finitos (MEF) a partir do programa FEMM (*Finite Element Method Magnetics*). Além de ser possível observar os efeitos de borda, a carga total em cada uma das placas também é dada pelo programa FEMM, o que possibilita comparar o capacitor simulado com o ideal.

O objetivo deste trabalho é propor uma equação que considere os efeitos de borda no cálculo da capacitância. Esta equação é obtida com o auxílio do método dos elementos finitos e da teoria da perturbação ao se considerar os efeitos de borda como uma perturbação do caso ideal.

II. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF é um método numérico empregado na solução de problemas de valor de contorno (PVC) descritos por equações diferenciais e com um conjunto de condições de contorno [6]. Entre as diversas condições de contorno, se destacam as condições de Dirichlet e Neumann [7].

A principal ideia do MEF é discretizar todo o domínio do PVC em pequenos subdomínios conhecidos como elementos, e aproximar a solução a partir de uma função de interpolação em cada elemento [6].

O MEF pode ser formulado tanto pelo método dos resíduos ponderados quanto pelo método variacional [8]. O método dos resíduos ponderados é mais simples do ponto de vista matemático, e parte diretamente da equação diferencial que define o problema.

Uma equação diferencial pode ser representada simbolicamente como descrito em (3) [8], no qual L representa um operador diferencial, u é a função solução desconhecida e, p , é a função das fontes dentro do domínio.

$$L(u) = p \quad (3)$$

O MEF formulado a partir do método dos resíduos ponderados consiste em substituir a função solução u por uma função de interpolação e , em seguida, multiplicar a equação diferencial por uma função w conhecida como função de ponderação [8]. Pela aproximação de Galerkin, a função de ponderação é igual a função de interpolação [6]. Por fim, a equação é integrada ao longo de todo o domínio Ω_e de cada elemento, como em (4).

$$\int_{\Omega_e} w L \left(\sum_{j=1}^N c_j v_j \right) d\Omega_e = \int_{\Omega_e} w f d\Omega_e \quad (4)$$

Desenvolvendo-se a Equação (4), no final se chega a um sistema matricial de equações algébricas que, após a sua solução, descreve o comportamento da função u ao longo de todo o domínio do problema.

III. TEORIA DA PERTURBAÇÃO

A teoria da perturbação é o estudo do efeito de pequenos distúrbios sobre um problema matemático [9]. A aplicação da teoria da perturbação se baseia em identificar um pequeno parâmetro λ , denominado parâmetro de perturbação, de tal modo que quando $\lambda = 0$ o problema possui uma solução conhecida [10].

Como exemplo da aplicação da teoria da perturbação, se pode considerar a equação algébrica dada em (5) [11].

$$x = 1 + \lambda x^3 \quad (5)$$

Quando o parâmetro de perturbação é nulo ($\lambda = 0$) a solução de (5) é dada de acordo com (6).

$$x = 1 \quad (6)$$

A diferença entre (5) e (6) é que a primeira corresponde a uma equação perturbada, enquanto a outra é uma equação não perturbada [12].

Problemas que possuem solução analítica quando $\lambda = 0$, podem ter sua solução para pequenos valores de λ expandida em uma série de potências de λ [11], como descrito em (7).

$$x = 1 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \dots \quad (7)$$

Na maior parte das aplicações, considera-se apenas um ou dois termos da expansão em série de potência [12]. A justificativa para ignorar termos de maior ordem se deve ao fato de que na teoria da perturbação se assume que $0 < \lambda < 1$, portanto $\lambda^2 < \lambda$, e assim por diante, além de que, quanto mais termos são considerados maiores se tornam os cálculos [13].

Mesmo que um problema não contenha um parâmetro λ , a depender da sua complexidade, as vezes é aconselhável introduzir o parâmetro de perturbação de modo que quando $\lambda = 0$ se tem o problema original sem perturbação [10], já que os métodos de perturbação são capazes de produzir uma aproximação analítica que depende da solução sem perturbação [9].

Por fim, se pode resumir que a teoria da perturbação pode ser aplicada para encontrar uma aproximação a um problema real a partir da sua formulação ideal.

IV. EFEITOS DE BORDA TRATADOS COMO UMA PERTURBAÇÃO

Neste trabalho se considera somente capacitores de placas paralelas quadradas e que possuem como dielétrico o ar, além de que as simulações são feitas somente no espaço bidimensional. Dito isso, a Figura 1 ilustra um capacitor de placas paralelas e a distribuição do seu campo elétrico. A partir desta ilustração, é possível observar o campo elétrico fora da região interna do capacitor que é desconsiderado no caso ideal.

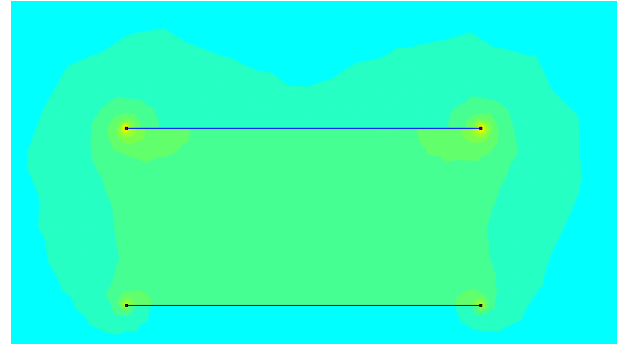


Figura 1. Efeitos de borda em um capacitor de placas paralelas quadradas

Devido aos efeitos de borda serem analisados numericamente a partir do programa FEMM, a capacitância obtida se desvia em relação a capacitância real medida por um analisador de impedâncias, por exemplo, já que se desconsidera interferenciais que ocorrem em aplicações práticas, como variações de temperatura. Portanto, a capacitância ideal C_i é comparada com a capacitância C_s resultante da simulação, que é tomada como referência. Como o programa FEMM estima a quantidade de cargas em cada uma das placas do capacitor, a capacitância simulada é definida como em (8).

$$C_s = \frac{Q}{V} \quad (8)$$

Considerando-se os efeitos de borda como uma perturbação em relação ao caso ideal, se pode definir uma capacitância de aproximação C_{aprox} como sendo constituída pela soma de duas parcelas, sendo a primeira a própria capacitância ideal, e a segunda sendo a capacitância ideal multiplicada pelo parâmetro de perturbação λ , de acordo com (9).

$$C_{aprox} = C_i + \lambda C_i \quad (9)$$

A capacitância C_{aprox} é uma aproximação à capacitância simulada C_s ao se considerar os efeitos de borda como uma perturbação ao caso ideal. Caso o parâmetro de perturbação λ seja nulo, se tem a equação sem perturbação que corresponde ao caso ideal descrito em (1).

Na Equação (9) o parâmetro de perturbação tem por objetivo inserir uma perturbação na capacitância ideal. É importante ter

em mente que para cada configuração de capacitor, se tem um parâmetro de perturbação de valor diferente, ou seja, o grau de perturbação no modelo ideal depende do problema em análise.

V. DEFINIÇÃO DO PARÂMETRO DE PERTURBAÇÃO EM FUNÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO CAPACITOR

Uma maneira de definir o valor do parâmetro de perturbação λ , é substituir o valor de C_s , encontrado pelo MEF, em (9). No entanto, este processo deve ser feito a todo momento em que um capacitor diferente for analisado, além de ser um método pouco prático.

Como mencionado anteriormente, ao se ter uma solução analítica conhecida quando $\lambda = 0$, é possível expandir o problema em uma série de potências de λ , tomando-se a solução analítica como o primeiro termo da série. No entanto, a Equação (9) permite uma abordagem diferente que possibilita definir o parâmetro de perturbação em função das características físicas do capacitor. Desta forma é possível estimar um valor para o parâmetro de perturbação para cada caso apenas com os dados construtivos do capacitor.

Como a capacitância C_s é conhecida, e obtida a partir de simulações, a sua substituição em (9) resulta em (10).

$$\lambda = -1 + \frac{C_s}{C_i} \quad (10)$$

É possível notar, em (10), que quando C_s for igual a C_i , o parâmetro de perturbação λ é igual a zero, o que faz (9) descrever a capacitância de um capacitor ideal. Além disso, a fração mantém o parâmetro de perturbação adimensional.

Para a definição de λ em função de parâmetros construtivos do capacitor, se analisa o comportamento da fração C_s/C_i em relação as variações de l e d , no qual l é o comprimento de um dos lados do capacitor em milímetros e, d , é a distância entre as placas também em milímetros. Para esta análise, estudou-se um conjunto de 72 dados com $80 \text{ mm} \leq l \leq 150 \text{ mm}$ e d variando de 10% de l à 80% de l .

A Figura 2 ilustra os valores amostrais e a superfície de ajuste, no qual C_s/C_i é representado por k para simplificar a notação.

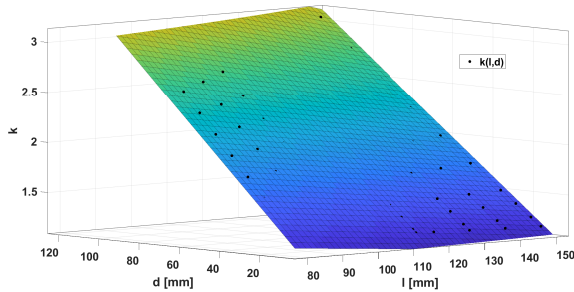


Figura 2. Superfície de interpolação de k em função de l e d

A superfície de ajuste ilustrada na Figura 2 é descrita em (11). Seu R^2 (coeficiente de determinação), valor que mede o quão próximo os pontos amostrais estão da curva de ajuste, é de 0,9956.

$$k = 1,373 \cdot \left(1 + \frac{d}{52,370}\right) \cdot \left(1 - \frac{l}{456,900}\right) \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10), se obtém o parâmetro de perturbação dado em (12).

$$\lambda = -1 + 1,373 \cdot \left(1 + \frac{d}{52,370}\right) \cdot \left(1 - \frac{l}{456,900}\right) \quad (12)$$

VI. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o resultado expresso em (12), o parâmetro de perturbação pode ser estimado a partir do comprimento l da placa, em milímetros, e da distância d entre as placas, também em milímetros.

Para a comparação de resultados, a capacitância C_s obtida a partir do programa FEMM é comparada com a capacitância C_{aprx} dada em (9), no qual o parâmetro de perturbação é estimado a partir de (12).

A Figura 3 ilustra os valores obtidos para quatro tamanhos diferentes de placas com a distância d variando entre 10% e 80% do comprimento da placa. Como se pode observar, devido aos efeitos de borda, a capacitância ideal se mantém abaixo da capacitância simulada C_s e da capacitância C_{aprx} .

Para cada uma das quatro configurações de capacitor, o erro relativo percentual é calculado como em (13), tomando-se a capacitância C_s como referência.

$$ErroRelPer = \frac{|C_s - C_{aprx}|}{|C_s|} \cdot 100\% \quad (13)$$

A Tabela I lista os maiores e menores erros relativos percentuais para as quatro configurações de capacitores com suas capacitâncias ilustradas na Figura 3.

Tabela I
ERROS RELATIVOS PERCENTUAIS

l [mm]	Maior Erro [%]	Menor Erro [%]
80	5,318	0,602
115	1,371	0,143
130	2,467	0,227
150	6,165	0,226

A Figura 4 ilustra o comportamento do parâmetro de perturbação λ , para um capacitor com placas de dimensões $l = 80 \text{ mm}$, a medida em que a distância entre as placas aumenta. O que não é interessante se observar aqui é o seu comportamento linear, já esperado de acordo com (12), mas o fato de que o parâmetro de perturbação tende a ser maior a medida em que a distância entre as placas aumenta.

Como mencionado anteriormente, o propósito do parâmetro de perturbação em (9) é o de inserir um grau de perturbação no modelo ideal. A Figura 5 ilustra um capacitor de placas paralelas com placas de dimensões de 150 mm e distâncias de 20 mm e 90 mm entre as placas. Para o capacitor com distância menor entre as placas, de 20 mm , é nítido que o campo elétrico é mais uniforme entre as placas e os efeitos de borda são de menor magnitude. Já para o caso em que a

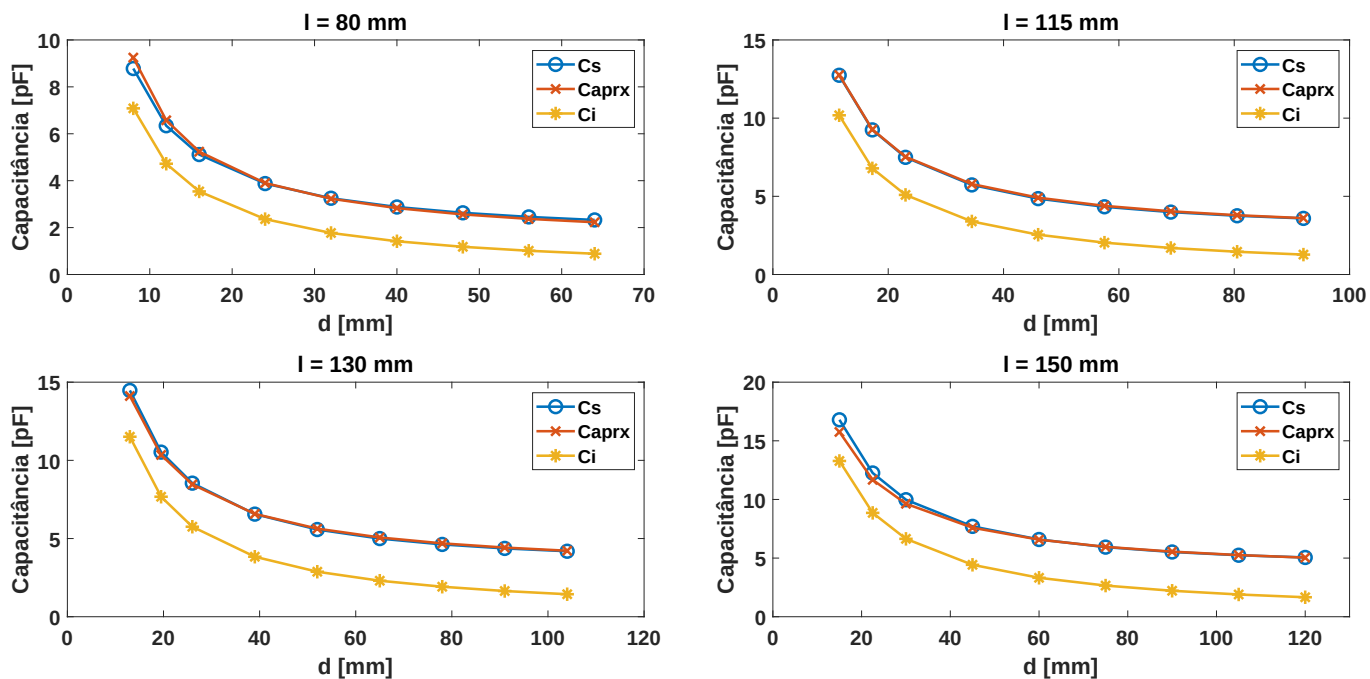
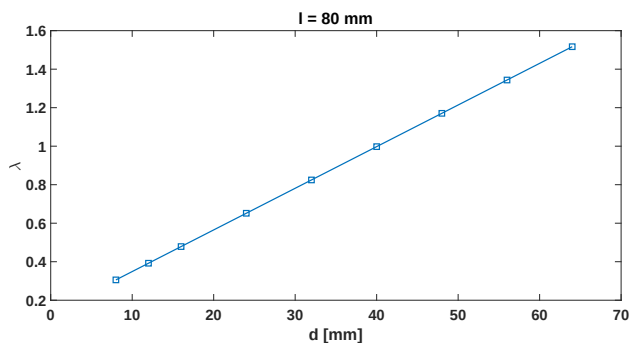


Figura 3. Valores de capacitância para quatro configurações diferentes de placas

Figura 4. Comportamento do parâmetro de perturbação λ em relação a distância d entre as placas do capacitor

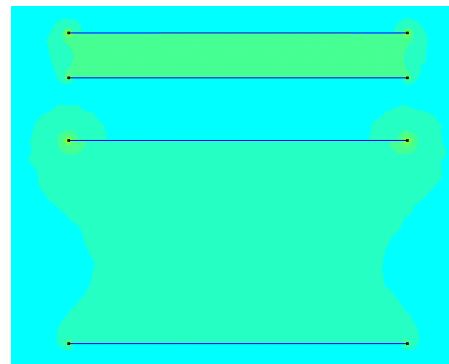
distância é maior, de 90 mm, a distribuição do campo elétrico é menos uniforme entre as placas, além de que os efeitos de borda passam a ser mais significativos. Portanto, o aumento do valor do parâmetro de perturbação está em concordância com aumento dos efeitos de borda a medida em que a distância entre as placas se torna maior.

VII. CONCLUSÃO

Neste trabalho se mostrou que a capacitância ideal difere da capacitância de um capacitor real devido aos efeitos de borda. Uma breve explicação do método dos elementos finitos e da teoria da perturbação foi apresentada.

Com a aplicação da teoria da perturbação, se demonstrou um novo método de abordagem dos efeitos de borda ao considerá-los como uma perturbação no capacitor ideal.

Com o auxílio do método dos elementos finitos, e a partir da análise de um conjunto de dados, se obteve uma equação para

Figura 5. Comparação da distribuição do campo elétrico de um capacitor com $l = 150$ mm e distâncias de 20 mm e 90 mm

a estimação do parâmetro de perturbação em função das características construtivas do capacitor. Os resultados analisados se mostraram satisfatórios.

Neste trabalho, os dados analisados se restringiram a capacitores com dimensões de placas de 80 mm à 150 mm. Resultados mais precisos para uma maior variedade de configurações de capacitores podem ser obtidos ao se analisar uma maior quantidade de dados.

Uma das maneiras de amenizar os efeitos de borda em aplicações práticas, é a instalação de placas auxiliares nas bordas do capacitor conhecidas como capacitor de guarda. Estas placas não devem encostar no capacitor, devendo ser instaladas a uma distância mínima possível.

REFERÊNCIAS

- [1] B. Wells, E. Baker, A. Farwell, H. Foster, X. Gao, B. Gruber, E. Jones, D. Vu, S. Xu, and J. Ye, "An adjustable parallel-plate capacitor instrument—test of the theoretical capacitance formula," *American Journal of Physics*, vol. 84, no. 9, pp. 723–726, 2016.
- [2] A. Pramanik, *Electromagnetism: Theory and Applications*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2008.
- [3] E. YARIV, "Edge corrections for parallel-plate capacitors," *European Journal of Applied Mathematics*, vol. 32, no. 2, pp. 226–241, 2021.
- [4] J. M. Bueno Barrachina, C. S. Cañas Peñuelas, and S. Catalán Izquierdo, "Fem edge effect and capacitance evaluation on cylindrical capacitors," *Journal of Energy and Power Engineering*, vol. 6, no. 12, pp. 2063–2069, 2012.
- [5] F. T. Ulaby, E. Michielssen, and U. Ravaioli, *Fundamentals of applied electromagnetics*. Pearson Boston, 2015.
- [6] A. C. Polycarpou, "Introduction to the finite element method in electromagnetics," *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, vol. 1, no. 1, pp. 1–126, 2005.
- [7] D. Poljak, *Advanced modeling in computational electromagnetic compatibility*. John Wiley & Sons, 2007.
- [8] J.-M. Jin, *Theory and computation of electromagnetic fields*. John Wiley & Sons, 2011.
- [9] J. G. Simmonds and J. E. Mann, *A first look at perturbation theory*. Courier Corporation, 2013.
- [10] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [12] —, *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011.
- [13] J. A. Murdock, *Perturbations: theory and methods*. SIAM, 1999.