



Controle Robusto $\mathcal{H}_2$ do Modelo do Pêndulo Invertido com Incertezas Politópicas

Julio Estefano Augusto Rosa Filho¹ julio.estefano@ifpr.edu.br
Márcio Roberto Covacic² (orientador) marciocovacic@uel.br

1 – Instituto Federal do Paraná – IFPR Paranavaí

2 – Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina – DEEL-UEL

Resumo: Neste artigo é apresentado o projeto de um controlador $\mathcal{H}_2$ aplicado ao modelo do pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, onde é considerada a presença de incertezas paramétricas do tipo politópicas, e a otimização de determinados índices de desempenho do sistema de controle, sendo o critério de desempenho a norma $\mathcal{H}_2$. No desenvolvimento do controle $\mathcal{H}_2$ é adotada uma abordagem por LMI's, e com essa técnica é obtido um ganho do controlador que estabiliza o sistema e minimiza a norma $\mathcal{H}_2$. Os procedimentos para a validação do controle foram feitos por meio de análises e condições matemáticas e simulações computacionais com o software MATLAB.

Palavras-chave: Pêndulo invertido. Incertezas Politópicas. Controle $\mathcal{H}_2$. Inequações Matriciais Lineares.

1. Introdução

O pêndulo invertido é um sistema mecânico que vem sendo muito estudado em controle de sistemas instáveis, o que torna sua planta bastante utilizada na investigação e desempenho de várias técnicas de controle.

O projeto de controladores para sistemas sujeitos a incertezas de parâmetros tem sido um dos objetivos da teoria de controle robusto. Em Gonçalves; Palhares; Takahashi (2004), desenvolve-se o problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, por realimentação de estados, e em Gonçalves; Palhares; Takahashi (2006), o uso de controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são utilizados para sistemas incertos.

Neste trabalho, é projetada uma lei de controle por realimentação de estados, cuja matriz de ganhos é projetada de modo a estabilizar o sistema e minimizar a norma $\mathcal{H}_2$. A proposta é projetar e avaliar o desempenho de um controlador ótimo $\mathcal{H}_2$, a partir de um problema de otimização convexa, apresentado na forma de inequações matriciais lineares (LMI's).

No desenvolvimento desse controle, é considerada a presença de distúrbios e incertezas no sistema de controle onde o parâmetro incerto a ser considerado é a massa do pêndulo que possui valor constante, mas desconhecido, embora esteja dentro de um intervalo conhecido.

Para validações dos resultados, foram realizadas simulações computacionais com o auxílio do ambiente de simulação do Matlab no ambiente Simulink.

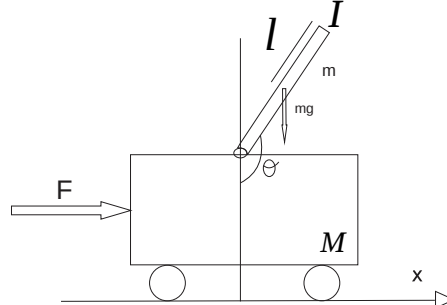
2. Materiais e Métodos

O sistema em estudo consiste de um pêndulo invertido em um carro móvel, onde a

barra sobre o carro fica livre para mover-se conforme ilustra a Figura 1. Primeiramente será feita uma descrição do modelo em estudo considerando as equações da física que descrevem a dinâmica do movimento do carro conforme encontrado em (BUGEJA, 2003).

Para o desenvolvimento do modelo do pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel, considere a Figura 1.

Figura 1 - Pêndulo invertido sobre carro móvel



Fonte: Adaptado de Bugeja, (2003)

As equações dos movimentos para esse sistema foram obtidas utilizando-se as Leis de Newton. Dessa forma, considerando o diagrama de corpo livre da Figura 1, tem-se que:

$$F = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (1)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2)$$

As equações (1) e (2) não são lineares. Para encontrar a função de transferência do sistema, é necessário obter um modelo linearizado. Considerando o ponto de equilíbrio do sistema representado pela Figura 1, onde o valor de θ é considerado a partir da posição de equilíbrio representado por $\theta = \pi - \varphi$, onde φ é uma pequena variação de θ da posição vertical do pêndulo invertido. Dessa forma, linearizando as equações (1) e (2), obtêm-se as equações linearizadas:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} = F \quad (3)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\varphi} - mgl\varphi = ml\ddot{x} \quad (4)$$

Para o projeto de controladores usando realimentação de estados, o ganho de realimentação de estado ótimo pode ser obtido pelo sistema de controle obtido em (AGUIRRE, 2007):

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t),$$

$$z(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t),$$

$$y(t) = C_y(\alpha)x(t), \quad (5)$$

onde, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $z(t) \in \mathfrak{R}^q$, e $y(t) \in \mathfrak{R}^r$, representam respectivamente os vetores de estado, de controle, de perturbação, de saída controlada e a saída medida. Considere ainda para o sistema (5) que:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, B(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i, B_w(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi},$$

$$C(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i C_i, D(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i D_i, C_y(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i C_{yi}, \quad (6)$$

sendo que:

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \text{ e } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (7)$$

onde, $i = 1, \dots, N$ no qual $N = 2^n$, n representa o número de parâmetros incertos, e $A_i, B_i, B_{wi}, C_i, D_i$ e C_{yi} são matrizes constantes para cada parâmetro incerto.

Para calcular a norma $\mathcal{H}_2$ para o sistema em malha fechada, considerando a lei de controle por realimentação positiva Aguirre (2007) de estado linear definida por $u = Kx(t)$, obtêm-se as LMI's:

$$\begin{cases} \min \text{Tr}\{J\}, \\ \text{sujeito a : } \begin{bmatrix} J & B'_w(\alpha) \\ B_w(\alpha) & X \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A(\alpha)X + XA'(\alpha) + B(\alpha)Z + Z'B'(\alpha) & XC'(\alpha) + Z'D'(\alpha) \\ C(\alpha)X + D(\alpha)Z & -I \end{bmatrix} \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

A partir da solução, obtêm-se a matriz de realimentação de estados.

$$K = ZX^{-1}, \quad (9)$$

e a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema, com o ganho obtido é:

$$\|T_{zw}\|_2 \leq \sqrt{\text{Tr}(J)} \quad (10)$$

Através do modelo linearizado das equações (3) e (4) são obtidas suas representações em espaços de estados descrito por (11) e (12), onde o distúrbio a ser considerado é representado pela massa m presente nas matrizes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2 gl^2}{(M+m)I + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl(M+m)}{(M+m)I + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{(M+m)I + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{(M+m)I + Mml^2} \end{bmatrix} u \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (12)$$

3. Resultados e discussões

Para o sistema do pêndulo invertido, foi considerado que o pêndulo tem uma massa de valor constante e pertencente dentro de um intervalo conhecido. Portanto, a massa do pêndulo terá uma variação no intervalo de $[m+\delta]$ a $[m-\delta]$. Para esse sistema, será considerado também que: $M = 0,5\text{kg}$, $m = 0,4\text{kg}$, $l = 0,15\text{m}$ e $I = 0,003\text{kgm}^2$.

Considerando que a margem de incerteza da massa do pêndulo seja de 40% tem-se que, as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ formam uma combinação convexa de dois vértices que são representadas pelos seguintes elementos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 53.1176 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.3016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 92.1395 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7073 \\ 0 \\ 7.3171 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6456 \\ 0 \\ 8.8608 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

onde é considerado que B_{w1} e B_{w2} são iguais a B_1 e B_2 .

Para o problema de controle definido em (8), busca-se a função objetivo f_0 de modo

que a lei de controle $u(t)$ minimize a norma $\mathcal{H}_2$. Para isso, considere as seguintes variáveis:

$$J = [j] \quad (14)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4] \quad (16)$$

Assim, na descrição do problema por LMI's,

$$v_d = [j \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{22} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{33} \quad x_{14} \quad x_{24} \quad x_{34} \quad x_{44} \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T, \quad (17)$$

e a função objetivo é descrita por:

$$fo = Tr\{J\} \quad (18)$$

Aplicando a condição dada em (8) as matrizes dos vértices representadas por (13), tem-se que o ganho do controlador obtido por programação no Matlab é dado por:

$$K = [66.8728 \quad 49.3949 \quad -86.7713 \quad -15.0136] \quad (19)$$

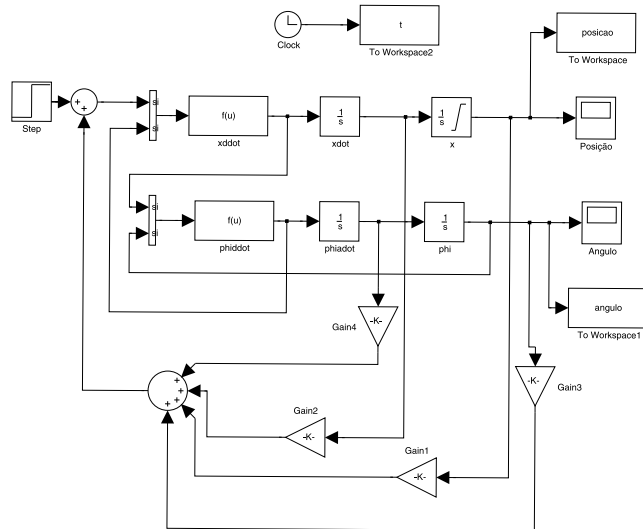
Assim a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema controlado é igual a:

$$norma\mathcal{H}_2 = 0,3978 \quad (20)$$

3.1. Simulação do pêndulo linearizado considerando incertezas politópicas

Para o sistema linearizado do pêndulo, foi obtida a planta da Figura 2 construída no ambiente Simulink do Matlab.

Figura 2 - Planta para o sistema linearizado em malha fechada

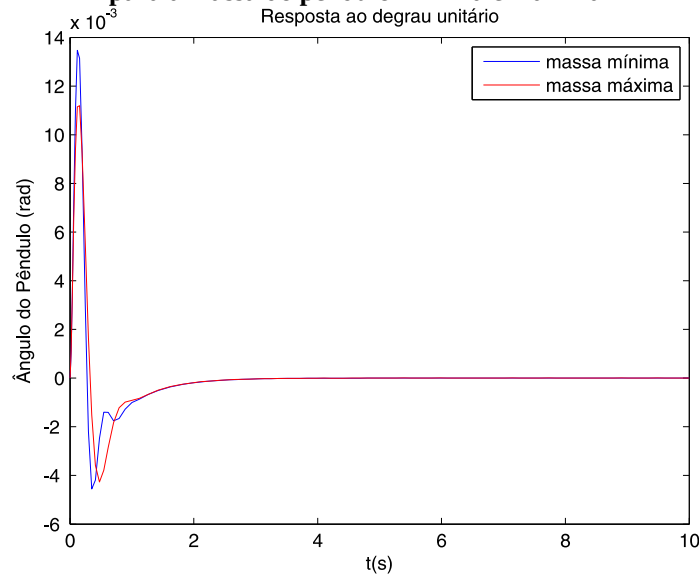


Fonte: Próprio autor, (2015)

Para a simulação, foram considerados dois valores para a massa do pêndulo: (i) para a massa mínima, (ii) para a massa máxima, definindo dessa forma, dois vértices para o politopo.

Para a simulação do ângulo do pêndulo, considerando a massa do pêndulo mínima e máxima, foi obtido o resultado mostrado na Figura 3.

Figura 3 - Ângulo do pêndulo considerando o ganho do controlador para a massa do pêndulo mínima e máxima



Para o gráfico que representa o ângulo de estabilidade do pêndulo, verifica-se que, em ambos os casos da massa, o sistema estabiliza na posição zero graus conforme esperado, sendo o comportamento diferenciado apenas no instante anterior à 2 segundos.

4. Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada uma modelagem matemática do sistema físico de um pêndulo invertido sobre um carro móvel. Considerando que o pêndulo é um sistema altamente instável, projetou-se um controlador por realimentação de estados, considerando o sistema sujeito a incertezas politópicas, onde o parâmetro incerto foi atribuído à massa do pêndulo e o critério de desempenho como sendo a norma $\mathcal{H}_2$.

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automática: Controle e Automação, volume II**. São Paulo: Blucher, 2007.

BUGEJA, M. **Non-linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system**. EUROCON, Ljubljana, Slovenia, 2003.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, H. C. **Síntese de controladores PID $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ robustos para sistemas incertos**. XVI Congresso Brasileiro de Automática CBA, 2006.

GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. **Otimização multi-objetivo aplicada a síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado**. XV Congresso Brasileiro de Automática CBA, 2004.